применом Вајерштрасове теореме може се потпуно избећи испитивање карактера стационарних тачака.

Пример 2.6.4

Нађимо највећу и најмању вредност функције $f\colon [-1,1]^2 \to \mathbf{R}$, дате са $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y^2 - 2y$.

Систем једначина $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4xy = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4y - 2 = 0$ има унутар квадрата $(-1,1)^2$ два решења: $(0,1/2)$ и $(-1/2,3/8)$. Даље је $f(1,y) = 2y^2 + 1$, $f(-1,y) = 2y^2 - 1$, $f(x,1) = x^3 + 2x^2$, $f(x,-1) = x^3 - 2x^2 + 4$, па се као потенцијалне тачке екстремума добијају и стационарне тачке тих функција једне променљиве (које су на рубу датог квадрата): $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ и $(0,-1)$, као и темена квадрата $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ и $(-1,-1)$. Дата функција је непрекидна, а квадрат $[-1,1]^2$ је компактан скуп, па f на њему достиже своју најмању и највећу вредност. Оне могу бити само међу вредностима функције f у нађених 10 тачака. Међу њима је најмања $f(-1,0) = -1$, а највећа $f(0,-1) = 4$, па су то тражени екстремуми функције f на $[-1,1]^2$. ▲

ЗАДАЦИ

3. ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ

3.1. ПОСТАВКА ЗАДАТКА

Врло често у анализи, као и у другим областима математике, неке променљиве, рецимо x и y, везане су релацијом облика

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

По правилу, за практично проучавање те везе корисно је написати је у облику

$$y = f(x), \tag{2}$$

тј. једну од променљивих *експлицитно* изразити помоћу друге. Међутим, искуство нам показује да је до таквог облика изражавања функционалне зависности обично тешко, а често и немогуће доћи. Специјално, најчешће не постоји елементарна функција (2) помоћу које се може изразити веза (1), тј. таква функција да је

$$F\big(x, f(x)\big) = 0.$$

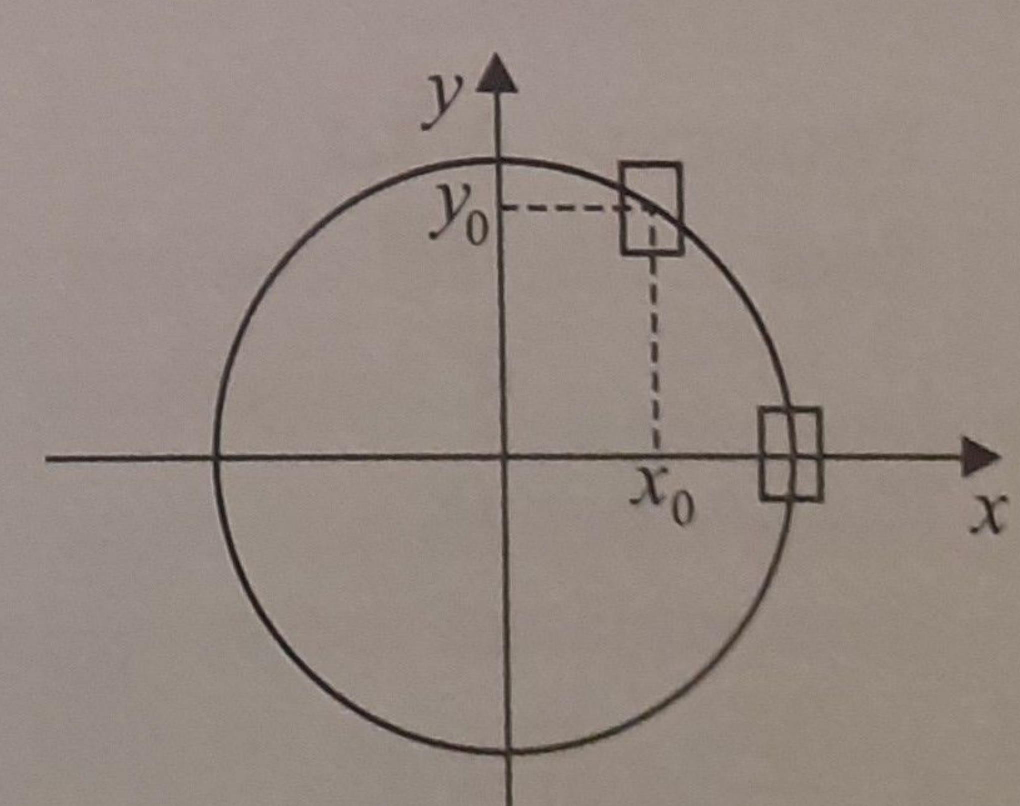
Зато се поменути проблем обично поставља у другачијем облику: уместо да се захтева да се функција (2) експлицитно одреди, тражи се да се докаже да таква функција *постоји* и да је јединствено одређена. Ако је то могуће учинити, кажемо да је функција $y = f(x)$ **имплицитно** задата релацијом (1).

Међутим, ни тако постављено питање нема увек потврдан одговор. Посматрајмо, на пример, једначину круга

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

За свако x за које је $|x| < 1$ постоје две вредности за y за које важи (3) – то су

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$



Сл. 3.1.1

На тај начин, постоји више функција $y = f(x)$, дефинисаних на сегменту $[-1, 1]$, са вредностима у $\mathbf{R}$, за које важи $x^2 + \big(f(x)\big)^2 = 1$. Али, постоји могућност да ограничавањем скупова у којима узимају вредности променљиве x и y ипак добијемо само једну функцију $y = f(x)$. На пример, за $x_0 \in (-1,1)$ и (једно од) $y_0 \in [-1,1]$ за које је $x_0^2 + y_0^2 = 1$ изаберимо позитивне бројеве δ и ε тако да $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (-1,1)$ и да правоугаоник $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ сече само онај полукруг круга $x^2 + y^2 = 1$ (одређен са $y > 0$, односно $y < 0$) који садржи тачку (x_0, y_0). Тада је геометријски очигледно (сл. 3.1.1) да је потпуно одређена функција $f\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, таква да је $x^2 + \big(f(x)\big)^2 = 1$ за све $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Поменимо, међутим, да ни овако „ублажени“ захтеви неће моћи увек да буду остварени. У претходном примеру узмимо $x_0 = 1$. Очигледно је да, мада постоји само једно y_0 за које је $x_0^2 + y_0^2 = 1$, ма како малим бирали бројеве δ и ε, пресек скупа $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ са правоугаоником $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ неће бити график неке реалне функције.

Ова глава биће углавном посвећена одређивању (довољних) услова који обезбеђују постојање имплицитне функције (2) која је дефинисана релацијом (1) и то, по правилу, у горе описаном „локалном“ смислу. При томе, променљиве x и y у релацијама (1) и (2) неће увек узимати вредности из скупа $\mathbf{R}$. Дозвољавајући да x, односно y, узима вредности и из вишедимензионих еуклидских простора $\mathbf{R}^n$, добијамо теореме о егзистенцији како реалних, тако и векторских функција, како једне, тако и више реалних променљивих.

Осим теорема о егзистенцији поменутих функција, даћемо и неке додатне ставове који омогућавају испитивање њихових особина. Најзад, биће дате и неке од многобројних примена поменутих теорема.

3.2. ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ СА РЕАЛНИМ ВРЕДНОСТИМА

Посматрајмо најпре најједноставнији случај када променљиве x и y у релацији (1) из претходног одељка узимају реалне вредности, тј. поставимо питање о егзистенцији имплицитне функције једне реалне променљиве која узима реалне вредности. Довољни услови за „локално“ постојање такве функције дати су у следећој теореми.

Теорема 3.2.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^2$ отворен скуп, $(a,b) \in A$ и нека је:

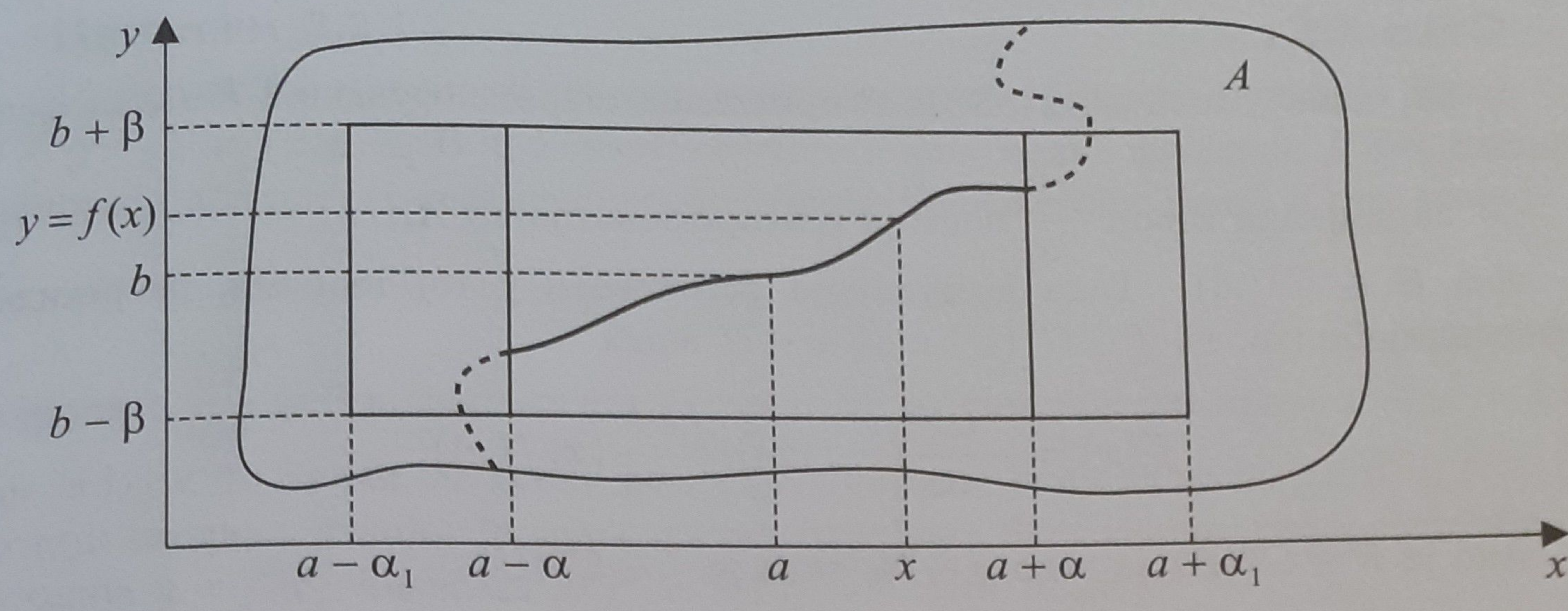
1° $F\colon A \to \mathbf{R}$ непрекидна функција;

2° $F(a,b) = 0$;

3° парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ постоји и непрекидан је на A;

4° $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Тада постоји околина $W = U \times V$ тачке (a,b) (где је $U = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \alpha\}$, $V = \{y \in \mathbf{R} \mid |y-b| < \beta\}$) и једнозначно одређена непрекидна функција $f\colon U \to V$, таква да је $f(a) = b$ и $F\big(x, f(x)\big) = 0$ за $x \in U$.



Сл. 3.2.1

Доказ.

Претпоставимо, одређености ради, да је $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$. Због непрекидности функције $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ постоји околина тачке (a,b) у којој је $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$. За ту околину можемо узети да је правоугаоник $[a-\alpha_1, a+\alpha_1] \times [b-\beta, b+\beta]$ који лежи унутар датог отвореног скупа A. Посматрајмо функцију $F(a,y)$ једне променљиве $y \in [b-\beta, b+\beta]$. Како је $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,y) > 0$, то та функција строго расте, па с обзиром да је $F(a,b)=0$, то је

$$F(a, b-\beta) < 0 \quad \text{и} \quad F(a, b+\beta) > 0.$$

Због непрекидности саме функције F закључујемо да одговарајуће релације важе и у некој околини тачке a, тј. да постоји број α, $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$, такав да је за све $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$ испуњено

$$F(x, b-\beta) < 0 < F(x, b+\beta).$$

Ако сада за свако такво фиксирано x посматрамо функцију $F(x,y)$ као реалну функцију променљиве y, дефинисану на сегменту $[b-\beta, b+\beta]$, добијамо да је то строго растућа непрекидна функција која узима вредности различитог знака на крајевима тог сегмента. Дакле, постоји, јединствено одређена, вредност $y = f(x) \in (b-\beta, b+\beta)$, таква да је $F(x, f(x)) = 0$. При томе је јасно и $f(a) = b$, јер је $y = b$ једина вредност из $(b-\beta, b+\beta)$ за коју је $F(a,y) = 0$.

Докажимо да је овако дефинисана функција $f\colon U \to V$ (где је $U = (a-\alpha, a+\alpha)$, $V = (b-\beta, b+\beta)$) непрекидна. С обзиром да за сваку тачку $x \in U$ важе исти услови (за функцију F) као за тачку $x = a$, то је довољно доказати непрекидност функције f у тачки a. За дато ε, $0 < \varepsilon < \beta$, понављајући претходни поступак, изаберимо δ, $0 < \delta < \alpha$, тако да за свако x за које је $|x-a| < \delta$ постоји само једно y за које је $|y-b| < \varepsilon$ и $F(x,y) = 0$; за то y ће важити $y = f(x)$. Но, тада је $|f(x) - f(a)| = |y - b| < \varepsilon$ за $|x-a| < \delta$, што и значи да је функција f непрекидна у тачки a. ■

Допунићемо наведену теорему о егзистенцији имплицитне функције ставом који описује нека њена својства.

Став 3.2.1

Нека, осим услова 1°, 2°, 3° и 4° претходне теореме, функција F задовољава и услов

5° парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ постоји и непрекидан је на A, тј. нека $F \in C^1(A)$. Тада је функција f, описана у тој теореми, непрекидно диференцијабилна, тј. $f \in C^1(U)$ и за $x \in U$ важи

(1)
$$f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, f(x)\big) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big).$$

Ако је $F \in C^p(A)$ за неко $p \in \mathbf{N}$, тада је $f \in C^p(U)$.

Доказ.

Нека је $x \in U$ и нека је $h \in \mathbf{R}$такво да $x + h \in U$ (користимо ознаке из претходне теореме). Означимо $y = f(x)$ и $f(x+h) - f(x) = k$. У околини W функција F задовољава услове за примену теореме о средњој вредности. Дакле, постоји број θ, $0 < \theta < 1$, такав да је

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k)k.$$

Но, лева страна ове једнакости једнака је нули, јер је и $F(x,y) = F(x, f(x)) = 0$ и $F(x+h, y+k) = F(x+h, f(x+h)) = 0$. Узимајући у обзир да је $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ у околини W, добијамо да је

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x+\theta h, y+\theta k).$$

Како је функција f непрекидна у тачки x, то $h \to 0$ повлачи $k \to 0$, а како су парцијални изводи $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрекидни у тачки (x,y), то преласком на лимес кад $h \to 0$ добијамо

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x,y),$$

где је $y = f(x)$, чиме је доказана једнакост (1).

Из непрекидности функција $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ у тачки (x,y) следи и непрекидност функције f' у тачки x.

Други део става доказује се индукцијом по p. ■

Нађимо, примера ради, израз за други извод имплицитне функције f. Ако је функција F двапут непрекидно диференцијабилна, диференцирајући једнакост (1) по x добијамо

$$f''(x) = -\frac{1}{(\partial F/\partial y)^2}\left\{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'(x)\right]\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'(x)\right]\right\},$$

при чему су сви изводи функције F рачунати у тачки $\big(x, f(x)\big)$.

Примери 3.2.1

1° Посматрајмо поново пример једначине круга, односно функције $F(x,y) = x^2+y^2-1$ за $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. У овом случају је очигледно функција F бесконачно диференцијабилна (тј. има непрекидне изводе произвољног реда) и при томе је

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

па је услов $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ задовољен ако је $y \neq 0$, тј. у оним тачкама криве $x^2+y^2=1$ за које је $|x|<1$. Значи, за сваку тачку (x,y) круга, осим за тачке $(1,0)$ и $(-1,0)$, постоји околина у којој је једнозначно одређена бесконачно диференцијабилна функција $y=f(x)$, таква да је $F(x,f(x))=0$. При томе је

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y}\,,$$

где је $y=f(x)$. Даљим диференцирањем добијамо

$$f''(x) = -\frac{y-xy'}{y^2} = -\frac{y+x\cdot\frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$$

итд. Наравно, у овом случају могуће је ове формуле проверити и директно, диференцирајући познати експлицитни израз за функцију f (приметимо да ће он бити $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ или $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$, зависно од тога којег знака је ордината изабране тачке (x,y)).

2° Одредимо тангенту **Декартовог листа** $F(x,y)=x^3+y^3-2xy=0$ у тачки $(1,1)$ (слика 3.2.2).

У тој тачки је $F(1,1)=0$ и

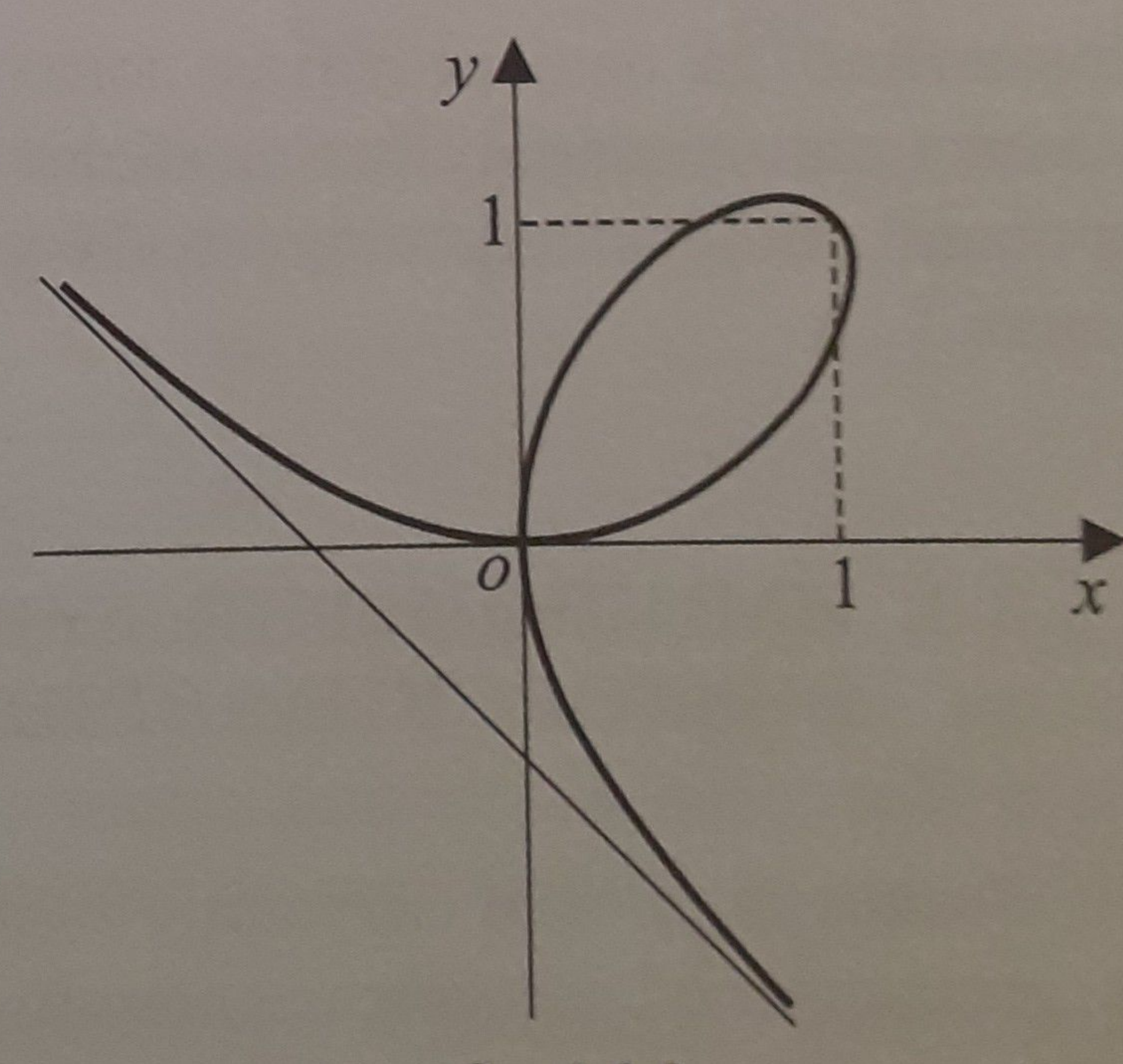
$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 3x^2-2y\ \Big|_{(1,1)} = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 3y^2-2x\ \Big|_{(1,1)} = 1 \neq 0,$$

па је у некој њеној околини одређена функција $y=f(x)$, таква да је $f(1)=1$ и

$$f'(1) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(1,1) = -1.$$

Дакле, тражена тангента има једначину $y-1=-(x-1)$. ▲



Следећа теорема даје уопштење теореме 3.2.1 и става 3.2.1 на случај имплицитно дефинисане реалне функције више промењљивих. И по формулацији и по доказу она се не разликује битно од тих тврђења, па одговарајући доказ нећемо наводити.

Теорема 3.2.2

Нека је $A \subset \mathbf{R}^{m+1}$ отворен скуп, $(a_1, \dots, a_m, b) \in A$ и нека је:

1° $F\colon A \to \mathbf{R}$ непрекидна функција (чији аргумент ћемо означавати са $(x_1, \dots, x_m, y)$),

2° $F(a_1, \dots, a_m, b) = 0$,

3° парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ постоји и непрекидан је на A,

4° $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a_1, \dots, a_m, b) \neq 0$.

Тада постоји околина $W = U \times V$ тачке $(a_1, \dots, a_m, b)$ ($U = \prod_{i=1}^{m}(a_i - \alpha_i, a_i + \alpha_i)$, $V = (b-\beta, b+\beta)$) и једнозначно одређена непрекидна функција $f : U \to V$, таква да је $f(a_1, \dots, a_m) = b$ и $F(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) = 0$ за $(x_1, \dots, x_m) \in U$.

Ако је још

5° $F \in C^p(A)$ за неко $p \in \mathbf{N}$,

тада важи $f \in C^p(U)$. При томе је за $i = 1, \dots, m$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial y}(x, f(x)). \quad \blacksquare$$

Пример 3.2.2

Претпоставимо да функција $F\colon A \to \mathbf{R}$, где је $A \subset \mathbf{R}^3$ отворен скуп, у некој околини тачке $(x, y, z) \in A$ задовољава услове који гарантују да једначина $F(x, y, z) = 0$ једнозначно дефинише диференцијабилне функције

$$x = x(y, z), \quad y = y(z, x), \quad z = z(x, y).$$

Тада је

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}\right)\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right)\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right) = -1.$$

Приметимо да овај резултат показује да се симболи за парцијалне изводе (за разлику од одговарајућих симбола за обичне изводе) не могу третирати као количници „диференцијала“, јер би у противном претходни производ морао бити једнак 1. ▲

3.3. ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ СА ВЕКТОРСКИМ ВРЕДНОСТИМА

Размотримо сада ситуацију када уместо једне имамо више функција које треба „имплицитно“ дефинисати помоћу више датих релација, тачније речено помоћу неког система једначина. Прецизније, претпоставимо да су на неком отвореном

104. $z^3 - 3xyz = a^3$.

◀ Parcijalne izvode funkcije z, definisane jednačinom $F(x, y, z) = 0$, nalazimo po formulama

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Za naš slučaj imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}, \quad z^2 \neq xy.$$

Uzimajući u obzir da je $z = z(x, y)$, nalazimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{(z^2 - xy)\, y \frac{\partial z}{\partial x} - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)}{(z^2 - xy)^2} \\
&= \frac{(z^2 - xy)\, y \frac{yz}{z^2 - xy} - yz\left(2z\frac{yz}{z^2 - xy} - y\right)}{(z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3 z}{(z^2 - xy)^3}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{2yx^3 z}{(z^2 - xy)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z^2 - xy)\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} \\
&= \frac{(z^2 - xy)\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} \\
&= \frac{z\left(z^4 - 2z^2xy - x^2y^2\right)}{(z^2 - xy)^3}, \quad z^2 \neq xy. \; ▶
\end{aligned}$$

$k=0\ m=0$

195. Neka je z implicitna funkcija od x i y, definisana jednačinom $z^3 - 2xz + y = 0$, koja za $x = 1$ i $y = 1$ uzima vrednost $z = 1$. Napisati nekoliko članova razlaganja funkcije z po rastućim stepenima binoma $(x-1)$ i $(y-1)$.

◀ Iz uslova zadatka sledi da je $z(1,1) = 1$. Nađimo izvode od z kao implicitne funkcije:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z}{3z^2 - 2x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3z^2 - 2x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\left(3z^2 - 2x\right)\frac{\partial z}{\partial x} - 2\left(6z\frac{\partial z}{\partial x} - 2\right)z}{\left(3z^2 - 2x\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6z\frac{\partial z}{\partial x} - 2}{\left(3z^2 - 2x\right)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6z\frac{\partial z}{\partial y}}{\left(3z^2 - 2x\right)^2}, \cdots$$

U tački $(1,1)$ je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6, \cdots$$

Koristeći formulu (2) prethodnog zadatka, dobijamo

$$z(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + \cdots.$$ ▶

Naći ekstremne vrednosti implicitne funkcije z od promenljivih x i y:

214. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$

◀ Funkcija $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, je polinom, i zato je neprekidna i diferencijabilna funkcija proizvoljan broj puta. Sleduje, u okolini proizvoljne tačke (x_0, y_0, z_0), u kojoj je $F = 0$, $F'_z \neq 0$, ispunjeni su svi uslovi teoreme 1, iz 2.3.3, saglasno kojoj jednačina $F(x, y, z) = 0$ definiše implicitnu funkciju $(x, y) \mapsto z(x, y)$, uzomajići u tački (x_0, y_0) vrednost z_0. Ta funkcija je proizvoljan broj puta diferencijabilna.

Za određivanje stacionarnih tačaka i vrednosti funkcije u njima sastavimo sistem

$$\begin{aligned} F'_x &\equiv 2x - 2 = 0, F'_y \equiv 2y + 2 = 0, \\ F &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0, \end{aligned}$$

iz kojeg nalazimo

$$M_1 = (1, -1)\,,\ z_1 = -2;\ M_2 = (1, -1)\,,\ z_2 = 6.$$

Pošto je izvod $F'_z \equiv 2z - 4$ u tačkama $(1, -1, -2)$ i $(1, -1, 6)$ različit od nule, to jednačina $F = 0$ u okolini svake od tačaka definiše implicitnu funkciju $(x, y) \mapsto z(x, y)$, koja u tački M_i uzima vrednost z_i, $i = 1, 2$.

Za proveru dovoljnih uslova ekstremuma nalazimo parcijalne izvode $F''_{x^2} = 2$, $F''_{y^2} = 2$, $F'_{xy} = 0$ i, koristeći formulu (2), iz 2.6.5, izračunamo drugi diferencijal u stacionarnim tačkama. Pošto je u tački M_1 za $z = -2$

$$d^2 z = \frac{1}{4}\left(dx^2 + dy^2\right) > 0,$$

a u tački M_2 za $z = 6$

$$d^2 z = -\frac{1}{4}\left(dx^2 + dy^2\right) < 0,$$

to je $z_{\min} = -2$, $z_{\max} = 6$ za $x = 1$, $y = -1$. ▶

215. $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$

скупу $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ дефинисане реалне функције $F_1, \ldots, F_n$, при чему ћемо њихов аргумент означавати са $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, и посматрајмо систем једначина

$$
\left\{
\begin{array}{l}
F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0.
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

Поставља се питање под којим условима се тај систем може „решити“ по непознатим $y_1, \ldots, y_n$, тј. под којим условима су „локално“ дефинисане функције

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m).
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

које задовољавају систем (1).

Да бисмо теорему која даје одговор на ово питање једноставније формулисали и доказали, уведимо следеће ознаке: уместо $(x_1, \ldots, x_m)$ писаћемо x, а уместо $(y_1, \ldots, y_n)$ само y; онда ће (x, y) бити ознака за уређену $(m+n)$-торку $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Такође, F ће бити ознака за $(F_1, \ldots, F_n)$, а f за $(f_1, \ldots, f_n)$, па ће систем (1) моћи кратко да се запише као

$$F(x, y) = 0, \tag{1'}$$

а тражено решење (2) као

$$y = f(x). \tag{2'}$$

У самој теореми и ставу који иза ње следи биће потребно да разматрамо следеће матрице (односно линеарне операторе):

$$
d_y F(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} (x,y), \quad d_x F(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} (x,y),
$$

које ћемо звати парцијалним диференцијалима функције F. Приметимо да је матрица $d_y F(x,y)$ квадратна, па је дефинисана њена детерминанта

$$\det d_y F(x,y) = \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$$

(јакобијан пресликавања F, схваћеног као функције променљивих $y_1, \ldots, y_n$). Ако је та детерминанта у некој тачки различита од нуле, одговарајућа матрица има инверзну $[d_y F(x,y)]^{-1}$. Као што ћемо одмах видети, та инвертибилност матрице $d_y F(x,y)$ игра улогу оног „одлучујућег“ услова (који је у теоремама 3.2.1 и 3.2.2 играо услов $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$), који обезбеђује егзистенцију имплицитне функције.

Теорема 3.3.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ отворен скуп, $(a,b) \in A$ и нека је:

1° $F\colon A \to \mathbf{R}^n$ непрекидна функција,

2° $F(a,b) = 0$,

3° парцијални диференцијал d_yF је дефинисан на A и сви његови елементи $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}$ су непрекидни $(j,k = 1, \ldots, n)$,

4° $\det d_yF(a,b) \neq 0$, тј. матрица $d_yF(a,b)$ је инвертибилна.

Тада постоји околина $W = U \times V$ тачке (a,b) (где је U околина тачке a у $\mathbf{R}^m$, а V околина тачке b у $\mathbf{R}^n$) и једнозначно одређена непрекидна функција $f\colon U \to V$, таква да је $f(a) = b$ и $F(x, f(x)) = 0$ за $x \in U$.

Доказ.

Ради једноставности писања претпоставимо да је $a = 0 = (0, \ldots, 0)$ и $b = 0 = (0, \ldots, 0)$. Јасно је да то неће ограничити општост нашег излагања.

Претпоставимо сада да је функција $y = f(x)$ која задовољава услове теореме већ нађена, тј. да за $y = f(x)$ важи

$$F(x,y) = 0.$$

Тада (и само тада) ће важити

$$y - [d_yF(0,0)]^{-1}F(x,y) = y.$$

На тај начин, тражена вредност y може се третирати као непокретна тачка пресликавања Φ_x које је за фиксирано x дато са

$$\Phi_x(y) = y - [d_yF(0,0)]^{-1}F(x,y) \tag{3}$$

(при томе се претпоставља да $(x,y) \in A$). Зато ћемо за доказ егзистенције и јединости вектора y користити Банахову теорему о егзистенцији непокретне тачке (теорема 1.3.2).

Приметимо најпре да је релацијом (3) пресликавање Φ_x коректно дефинисано. Заиста, за $(x,y) \in A$ је $F(x,y) \in \mathbf{R}^n$; оператор (матрица) $d_yF(0,0)$ је инвертибилан, по претпоставци теореме, и пресликава $\mathbf{R}^n$ у $\mathbf{R}^n$; зато и $[d_yF(0,0)]^{-1}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, па је композиција $[d_yF(0,0)]^{-1}F(x,y)$ дефинисана и њене вредности су у $\mathbf{R}^n$. Тако је и $\Phi_x(y)$ дефинисано ако је $(x,y) \in A$ и припада $\mathbf{R}^n$.

Да бисмо могли да применимо Банахову теорему, треба да правилно одаберемо (комплетан) метрички простор који ће оператор Φ_x преводити у самог себе и на коме ће он бити контракција.

Приметимо најпре да је за свако фиксирано x пресликавање Φ_x диференцијабилно у свакој тачки y за коју је $(x,y) \in A$ и важи

$$\begin{aligned} d\Phi_x(y) &= E - [d_yF(0,0)]^{-1}d_yF(x,y) \\ &= [d_yF(0,0)]^{-1}\big(d_yF(0,0) - d_yF(x,y)\big), \end{aligned}$$

Докажимо још да је функција f непрекидна. Заиста, за дато ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, можемо узети δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, тако да за свако $x \in K(0, \delta_1) \subset U$ постоји јединствено $y \in K(0, \varepsilon_1)$ за које је $F(x, y) = 0$, при чему је баш $y = f(x)$. Но, тада је

$$\|f(x) - f(0)\| = \|f(x) - 0\| = \|y\| < \varepsilon_1$$

за $\|x\| < \delta_1$, што и значи да је f непрекидна у нули. Међутим, услови теореме су испуњени за сваку тачку околине $W = U \times V$, па је функција $f \colon U \to V$ непрекидна.

Тиме је теорема у потпуности доказана. ■

Као и код случаја функције са реалним вредностима, допунимо ову теорему ставом који ближе описује нека својства имплицитне функције.

Став 3.3.1

Нека, осим услова 1°, 2°, 3° и 4° претходне теореме, функција F задовољава и услов

5° парцијални диференцијал $d_x F$ је дефинисан на A и сви његови елементи $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ су непрекидни ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$),

тј. нека $F \in C^1(A, \mathbf{R}^n)$. Тада је функција f, описана у тој теореми, непрекидно диференцијабилна, тј. $f \in C^1(U, \mathbf{R}^n)$ и за свако $x \in U$ важи

(6)
$$df(x) = -\left[d_y F\big(x, f(x)\big)\right]^{-1} d_x F\big(x, f(x)\big).$$

Ако је $F \in C^p(A, \mathbf{R}^n)$ за неко $p \in \mathbf{N}$, тада је $f \in C^p(U, \mathbf{R}^n)$.

Доказ

где је E јединична матрица типа $n \times n$ (тј. јединични оператор простора $\mathbf{R}^n$). Означимо са C норму оператора $[d_yF(0,0)]^{-1}$. Како је, по претпоставци, оператор $d_yF(x,y)$ непрекидан у тачки $(0,0)$, то је за (x,y) из неке околине $W' = U' \times V'$ те тачке испуњено

$$\|d_yF(0,0) - d_yF(x,y)\| < \frac{1}{2C},$$

а самим тим и

$$\|d\Phi_x(y)\| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Даље ћемо претпостављати да је услов (4) испуњен.

Према теореми о средњој вредности (теорема 2.4.2), за фиксирано $x \in U'$ и произвољне $y_1,\, y_2 \in V'$ важи

$$\begin{aligned} \|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)\| &\leqslant \|y_1 - y_2\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|d\Phi_x(y_1 + t(y_2 - y_1))\| \\ &< \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|. \end{aligned} \tag{5}$$

Овде смо користили чињеницу да се околина V' увек може изабрати тако да буде конвексна (на пример, кугла), па тада за $y_1,\, y_2 \in V'$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ такође важи $y_1 + t(y_2 - y_1) \in V'$.

Фиксирајмо сада произвољан број $\varepsilon > 0$, такав да је затворена кугла $V = K[0,\varepsilon]$ простора $\mathbf{R}^n$ садржана у V'. Докажимо да постоји број $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такав да је отворена кугла $U = K(0,\delta)$ простора $\mathbf{R}^n$ садржана у U' и да за свако $x \in U$ пресликавање Φ_x преводи куглу V у саму себе.

У том циљу, користећи непрекидност функције F у тачки $(0,0)$ и чињеницу да је $F(0,0) = 0$, одаберимо позитиван број δ тако да $U = K(0,\delta) \subset U'$ и да за $x \in U$ важи

$$\|\Phi_x(0)\| = \|[d_yF(0,0)]^{-1}F(x,0)\| \leqslant \|d_yF(0,0)^{-1}\|\,\|F(x,0)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затим, за $x \in U$ и $y \in V$, користећи оцену (5), добијамо

$$\|\Phi_x(y)\| \leqslant \|\Phi_x(y) - \Phi_x(0)\| + \|\Phi_x(0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

што и значи да $\Phi_x \colon V \to V$ за $x \in U$.

Кугла V је затворен подскуп комплетног метричког простора $\mathbf{R}^n$, па је и сама један комплетан метрички простор. На основу оцене (5) пресликавање Φ_x је, за свако $x \in U$, контракција тог простора. Према Банаховој теореми закључујемо да за свако $x \in U$ постоји и јединствено је одређена тачка $y = f(x) \in V$, која је непокретна за пресликавање Φ_x, тј. таква је да важи

$$f(x) = \Phi_x f(x) = f(x) - [d_yF(0,0)]^{-1}F\big(x, f(x)\big),$$

односно $F\big(x, f(x)\big) = 0$ за $x \in U$. Значи, функција $y = f(x)$ задовољава једначину $F(x,y) = 0$ за $(x,y) \in W = U \times V$. За њу је $f(0) = 0$ јер је

$$\Phi_0(0) = 0 - [d_yF(0,0)]^{-1}F(0,0) = 0,$$

а непокретна тачка пресликавања Φ_0 је јединствено одређена.

Напишимо у развијеном облику израз за диференцијал функције f у тачки x,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix},$$

при чему су сви изводи функције F рачунати у тачки $(x, y) = \big(x, f(x)\big)$.

Пример 3.3.1

Претпоставимо да је дат систем од n једначина са $2n$ промењљивих

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \dots, n),$$

тј. нека је дата функција $F\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ и једначина $F(x, y) = 0$. Претпоставимо, даље, да су „локално“ (дакле, у смислу претходне теореме и става) испуњени услови за егзистенцију диференцијабилне функције $y = f(x)$, такве да је $F(x, f(x)) = 0$ у околини неке фиксиране тачке a. Израчунајмо јакобијан функције f у тој тачки, тј. детерминанту $\det df(a) = \dfrac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$ диференцијала функције f у тачки a.

На основу формуле (6) имамо

$$\det df(a) = \det\{-[d_y F(a, f(a))]^{-1} d_x F(a, f(a))\}.$$

Као што знамо, детерминанта производа двеју матрица је производ њихових детерминаната. Што се множења са (-1) тиче, он мења матрицу тако што мења знак *свим* њеним елементима, што подразумева множење њене детерминанте са $(-1)^n$ (n је број врста, односно колона, те матрице). Најзад, детерминанта инверзне матрице је реципрочна вредност детерминанте дате матрице, па добијамо

$$\det df(a) = (-1)^n \frac{\det d_x F(a, f(a))}{\det d_y F(a, f(a))},$$

тј.

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) = (-1)^n \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a, f(a)) \Bigg/ \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}(a, f(a)). \quad \blacktriangle$$